

La comprensión de la situación física en la resolución de situaciones problemáticas. Un estudio en dinámica de las rotaciones

Consuelo Escudero y Eduardo A. Jaime

Departamento de Física. Facultad de Ingeniería. UNSJ. Avda. Libertador 1109 (O). 5400. San Juan. Argentina. E-mail: cescude@unsj.edu.ar

Resumen: Este estudio se ha realizado con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería. Se ha analizado la resolución escrita en situación real de aula de un problema integrativo con 34 estudiantes de nivel universitario. El análisis se ha basado principalmente en el marco de las teorías: de los modelos mentales de Johnson-Laird (1983, 1990) y de los campos conceptuales de Vergnaud (1982, 1990, 1996, 1998) procurando interpretar las dificultades de los alumnos en la construcción de representaciones mentales al resolver problemas. Es una investigación del tipo cualitativo, donde los datos se agrupan en categorías que no son provistas por el marco teórico. Los resultados obtenidos evidencian que un grupo importante de estudiantes ha generado representaciones mentales adecuadas al comprender la situación física.

Palabras clave: Resolución de problemas, situación física, competencias complejas, conocimiento en acción, representación.

Title: The understanding of physical situation in problem-solving. A study on the dynamics of rotational motion

Abstract: This study was carried out with a group of 1st-year students of the Engineering Faculty. The research was carried out in real classroom conditions. It was examined the written solution of one integrative problem made by thirty-four pupils. Johnson-Laird's Mental Models Theory (1983, 1990) and Vergnaud's conceptual fields Theory (1982, 1990, 1996, 1998) were used as theoretical frame trying to interpret the difficulties of the students in the construction of mental representations when solving problems. The research was carried out under the qualitative paradigm in which data are grouped in categories which are no previously defined by the theoretical frame work. The obtained results evidence that an important group of students has generated appropriate mental representations when understanding the physical situation.

Keywords: Problem-solving, physical situation, complex competences, knowledge in action, representation.

Introducción

El estudio del desarrollo y el aprendizaje de competencias complejas, sobre todo las que dependen de la ciencia y de la técnica constituye un aspecto central en cualquiera de las actividades profesionales. A tal punto que en los documentos que establecen criterios y normativas para la

formación, el reconocimiento –en cualquiera de los niveles de escolaridad– de la resolución de problemas como necesaria queda explícitamente establecido.

Con frecuencia en la enseñanza suelen plantearse dos tipos de situaciones: tareas o situaciones tipo –ejercicios o no– y situaciones parcialmente nuevas o nuevas. Precisamente comprender la resolución de un problema integrativo se trata de ir a contextos y situaciones diferentes se correspondería con una situación nueva en la que el sujeto puede no disponer –al menos inmediatamente– de todas las competencias necesarias, lo que obliga a un tiempo de reflexión y de exploración.

Vamos a entender por problema integrativo relativo aquel enunciado que involucra sólo contenidos de Física de cierta especificidad, (por ejemplo cuerpo rígido, energía, oscilaciones, etc.) pero que no se centran en un único tópico o tema con exclusividad (Escudero, González y García, 2000).

Se analizan algunas dificultades de los alumnos al resolver problemas en términos de qué conocimientos-en-acción están usando los estudiantes y utilizando una metodología desarrollada en otros trabajos (Escudero y Moreira, 2002; Escudero, Moreira y Caballero, 2003; Escudero, 2005) de cara a posibilitar la identificación a partir de una “inmersión en el aula”. La razón de esta búsqueda, se fundamenta en que tales conocimientos-en-acción –por mucho tiempo implícitos– pueden funcionar como obstáculos o como precursores en la adquisición de conceptos científicos. Lo que lleva a la necesidad de su identificación, y por tanto, de su investigación y documentación.

Se presentan en este trabajo los resultados de una investigación que prioriza los significados captados y elaborados por estudiantes universitarios de primer año a partir de la interacción entre lo que proporciona un enunciado y sus conocimientos previos, incluyendo tanto los conceptos como el método de trabajo. Las dificultades de los alumnos se analizan desde el puente tendido por Moreira en una reciente monografía (2002) entre las teorías de Johnson-Laird y de Vergnaud. En el apartado siguiente se describen apretadamente algunos elementos teóricos relevantes para el subsiguiente análisis.

Fundamentación teórica

La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud es una teoría psicológica de los conceptos (Vergnaud, 1990), una teoría cognitivista del proceso de conceptualización de lo real. El objetivo de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud es propiciar una estructura de las investigaciones sobre actividades cognitivas complejas, en especial con referencia a los aprendizajes científicos y técnicos. Se trata de una teoría pragmática en el sentido que presupone que la adquisición de conocimientos es moldeada por situaciones, problemas y acciones del sujeto en esas circunstancias (Vergnaud, 1994). Es decir, que por medio de su resolución es que un concepto adquiere sentido para el alumno. Además es una teoría de la complejidad cognitiva, que contempla el desarrollo de situaciones progresivamente dominadas, de los conceptos y teoremas necesarios para operar eficientemente en esas situaciones y de las palabras

y símbolos que pueden eficazmente representar esos conceptos y operaciones para el individuo, dependiendo de su nivel cognitivo.

Gérard Vergnaud discípulo de Piaget, amplía y redirecciona, en su teoría, el foco piagetiano de las operaciones lógicas generales de pensamiento hacia el estudio cognitivo del "sujeto-en-situación". A demás de eso, a diferencia de Piaget toma como referencia el propio contenido del conocimiento y el análisis conceptual de dominio de ese conocimiento (Vergnaud, 1994; Franchi, 1999). Para Vergnaud, Piaget no se dio cuenta de cuanto el desarrollo cognitivo depende de situaciones y de conceptualizaciones específicas necesarias para lidiar con ellas (1998).

Vergnaud (1990) considera al sujeto como un sistema dinámico con mecanismos regulatorios capaces de asegurar su progreso cognitivo a diferencia de otros enfoques más tradicionales sobre las concepciones previas de los alumnos.

Vergnaud considera que un concepto es un triplete de tres conjuntos (Vergnaud, 1983a; 1990; Franchi, 1999): $C = (S, I, L)$ donde

S: conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto (el referente);

I: conjunto de invariantes operatorias asociados al concepto (el significado);

L: conjunto de representaciones lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones a las que él se aplica y los procedimientos que de él se nutren (el significante).

La teoría de los campos conceptuales destaca que la adquisición de conocimiento es moldeada por las situaciones y los problemas previamente dominados y que ese conocimiento tiene, en consecuencia, muchas características contextuales (1996a). Sin embargo, probablemente exista una laguna considerable entre los invariantes que los sujetos construyen al interactuar con el medio y los invariantes que constituyen el conocimiento científico.

Vergnaud asigna al término situación un significado limitado, el de tarea o problema a resolver, pero amplio y variado a la vez. Para él, son las situaciones las que le dan sentido a los conceptos y el sentido no está en las situaciones en sí. Un concepto se vuelve significativo para el sujeto a través de una variedad de situaciones y de diferentes aspectos de un mismo concepto que están envueltos en dichas situaciones. Al mismo tiempo, una situación no puede ser analizada a través de un único concepto, se necesitan varios de ellos. Esta es la razón por la que deben estudiarse los campos conceptuales, y no situaciones aisladas o conceptos aislados (1994). La idea de situación de Vergnaud puede aceptarse limitada en el sentido de que no se entiende como una situación didáctica fundamental al estilo de Brousseau. Para Vergnaud la idea de situación es lo suficientemente "indefinida" como para incluir bajo ella problemas, tareas, preguntas, tanto las tradicionalmente escolares como las que están fuera de ese ámbito a condición de que permitan llevar a los estudiantes a interrogarse sobre determinadas relaciones complejas y especialmente

sobre la coherencia del sistema en estudio. (Escudero, Moreira y Caballero, 2003).

Vergnaud llama esquema a una organización invariante de la actuación para una determinada clase de situaciones (1990; 1994; 1996c; 1998). No es el comportamiento el que es invariante sino la organización del mismo. Por tanto, un esquema es un universal que es eficiente para toda una gama de situaciones que puede generar diferentes secuencias de acción, de recolección de información y de control, dependiendo de las características de cada situación particular (1998).

Los componentes de los esquemas según Vergnaud (1990; 1994; 1996b) son:

- Anticipaciones del objetivo a alcanzar, de los efectos a esperar y de las eventuales etapas intermedias;
- Reglas de acción del tipo "si...entonces" que permiten generar la secuencia de acciones del sujeto; es decir, reglas de búsqueda de información y control de los resultados de la acción;
- Invariantes operatorias (...) que dirigen el reconocimiento de los elementos pertinentes de la situación y la toma de información sobre la situación a tratar. Son los conocimientos contenidos en los esquemas.
- Posibilidades de inferencias (o razonamientos) que permiten "calcular" –aquí y ahora– las reglas y anticipaciones a partir de las informaciones e invariantes operatorias de los que dispone el sujeto.

Para Franchi (1999) la ausencia de una conceptualización adecuada está en el origen de los errores sistemáticos cometidos por los alumnos. Pero son las invariantes operatorias las que articulan teoría y práctica, es decir, las que hacen la articulación esencial, ya que la percepción, la búsqueda y la selección de la información se basarían completamente en el sistema de conceptos-en-acción disponibles en el sujeto (objetos, atributos, relaciones, condiciones, circunstancias) y de teoremas-en-acción subyacentes a su comportamiento.

Las invariantes operatorias se refieren a objetos, propiedades y relaciones que se mantienen a través de una serie de variaciones (o situaciones). Ellas delimitan lo que pertenece (o no) a un determinado concepto. Estos conocimientos, obviamente, no aparecen al modo de su formulación disciplinar –física, matemática, etc.–, sino que son utilizados en la acción y en la resolución de tareas, situaciones, problemas. Vergnaud los denomina así mostrando su similitud con las correspondientes categorías del pensamiento tal como son definidas desde la lógica, acentuando aquí su carácter implícito: "La invariante operatoria implica la construcción de objetos estables de pensamiento que permiten engendrar las reglas de acción del sujeto" (Ricco, 1994).

Un teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; un concepto-en-acción es una categoría de pensamiento considerada como pertinente (Vergnaud, 1996c; 1998).

La Teoría de los Campos Conceptuales se funda en cuatro hipótesis.

- ✓ En primer lugar, ni el funcionamiento de los conceptos ni su desarrollo pueden explicarse aisladamente, sino a partir de las relaciones que guardan unos con otros.
- ✓ En segundo lugar se concibe que un concepto adquiere su sentido en función de la multiplicidad de problemas a los cuales responde.
- ✓ En tercer lugar, las hipótesis anteriores no se vinculan, ambas con una hipótesis genética según la cual la adquisición conceptual se desarrolla durante un tiempo prolongado.
- ✓ En cuarto lugar, entre las sucesivas conceptualizaciones que construye un sujeto encontramos una jerarquía de modelos.

Acordamos con Moreira (2002) en que Vergnaud al rescatar y enriquecer el concepto de esquema introduciendo los conceptos de teorema-en-acción y concepto-en-acción, al definir concepto como un triplete, al colocar la conceptualización en el centro del desarrollo cognitivo, al priorizar la interacción sujeto-situaciones y, como no podría dejar de ser, al definir campo conceptual, este especialista provee un referencial muy rico para comprender, explicar e investigar el proceso de aprendizaje significativo.

En dicho trabajo Moreira tiende un puente entre los significados de representación en Vergnaud (1998) y la teoría de los modelos mentales (Johnson-Laird, 1983; Moreira, 1996). Al concebir a los modelos mentales como instrumentos de comprensión e inferencia, cuando nos enfrentamos con una situación nueva, construimos un modelo mental para entenderla, describirla y prever lo que va a ocurrir. Este modelo puede ser correcto o no, puede ser vago, confuso, incompleto, pero es, sobre todo funcional para su constructor y puede ser modificado recursivamente hasta adquirir tal funcionalidad.

Sin embargo, es importante no confundir modelo mental con esquemas de acción. Para Vergnaud los invariantes operatorios (teoremas y conceptos-en-acción) son componentes esenciales de los esquemas mientras los modelos mentales contienen proposiciones y señales ("tokens") que pueden interpretarse como invariantes operatorios (Moreira 2002).

Desde el punto de vista teórico, el concepto de esquema proporciona el vínculo indispensable entre actuación y representación (1996b): la relación entre situaciones y esquemas es la fuente primaria de la representación y, por tanto, de la conceptualización (1998). Ese proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y para la didáctica.

Un modelo mental es un instrumento de comprensión, construido para el momento y descartable en caso de alcanzarse la funcionalidad deseada –es decir, la comprensión, aunque no sea la compartida científicamente–. Un esquema es, según Vergnaud, la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones. Por lo tanto, es más estable. Pero, frente a una situación nueva, se necesita acomodar, descomponer y volver a combinar. Es decir, construir un nuevo esquema de acción. Es exactamente ahí donde parece encajar mejor la idea de modelo mental: para comprender una nueva situación el sujeto construye, inicialmente, un modelo mental, y no un esquema (Moreira, 2002).

Así pues, los modelos mentales son una instancia representacional que media entre el conocimiento previo del mundo y las nuevas situaciones. La principal función de la memoria no sería tanto reproducir el pasado como orientar la acción a partir de él (Glenberg, 1997; cita en Pozo, 2001), para lo cual se necesitan representaciones dinámicas y contextuales, como los modelos mentales.

La teoría de Vergnaud hasta ahora se ha utilizado principalmente como referencial para la educación matemática. Nada más natural que las investigaciones que sustentan su teoría hayan focalizado el aprendizaje y la enseñanza de las estructuras aditivas y multiplicativas, principalmente. No obstante, esa teoría no es específica de la Matemática. Este trabajo intenta profundizar este punto en la educación universitaria básica en física, continuando con otros trabajos que se han venido desarrollando también en nivel medio (Escudero y Moreira, 2002; Escudero, Moreira y Caballero, 2003, 2004, 2005; Escudero 2005).

En psicología cognitiva el lenguaje se concibe, sobre todo, como un vehículo para expresar el pensamiento, para expresar las representaciones que el individuo ha construido en su relación con el mundo físico. Se muestra aquí que el lenguaje -matemático, gráfico, etc.- usado por el solucionador vehiculiza significados (Escudero y Moreira, 2002) e inferencias realizadas al elaborar una solución (Escudero, Moreira y Caballero, 2003; Escudero, 2005).

Para el análisis partimos del hecho de que muy probablemente el uso de los signos y símbolos en las fórmulas "adaptadas" a la situación problemática trabajada, permite desocultar el significado de lo que se ha querido o podido expresar en el momento de la resolución. Es decir, el "habla" se ha utilizado para detectar inconsistencias, infiriendo sus significados aprendidos (o no). Se puede recuperar el sentido, siguiendo a Vergnaud (1990), como la relación del sujeto con las situaciones y los significantes.

Metodología de investigación

La investigación fue realizada en situación real de aula, durante el segundo semestre de 1998, en la disciplina Física I de la Facultad de Ingeniería de la UNSJ. Se ha analizado la resolución escrita de un problema de dinámica del cuerpo rígido en 34 estudiantes de 1º año, en ocasión de la tercera evaluación parcial. Dicha evaluación ha constado de seis items, este problema se ubica en último lugar y la evaluación ha abarcado los tópicos de cinemática, dinámica y estática rotacional, hidrostática e hidrodinámica.

El curso se ha estructurado básicamente a través de clases teóricas y abundante resolución de problemas de lápiz y papel, con fuerte énfasis en esta interrelación. La propuesta didáctica destaca la instrucción en métodos de resolución fundamentados en su marco teórico.

El problema ha sido seleccionado de un texto básico universitario. Exige la integración de varias temáticas: cinemática y dinámica del movimiento circular, energía mecánica y su conservación, rodadura sin deslizamiento y distintas restricciones al movimiento. El peso del contenido en cuanto a sus

relaciones es crucial, en ese sentido se dice que se trata de una situación integrativa parcialmente nueva.

Un alumno para resolver este problema necesita captar que el sistema canica-trayectoria curvilínea evoluciona en el tiempo y cómo evoluciona. El dibujo esquemático incluido ofrece pistas que tiene que ser capaz de decodificar y tener en cuenta a la hora de resolver. Por un lado, la canica rueda sin deslizar a lo largo de una trayectoria curvilínea vertical desde un "estado inicial" hacia un "estado final" bajo la acción combinada de una fuerza conservativa y de reacciones de vínculo. Por otro, la pista limita su movimiento.

Una canica sólida pequeña de masa " m " y radio " r " rueda sin deslizamiento a lo largo de la pista en rizo que se muestra en la figura, habiendo sido liberada desde el reposo en algún punto de la sección recta de la pista. (a) ¿Desde qué altura mínima desde el fondo de la pista deberá soltarse la canica con el fin de que se quede en la pista en la parte superior del rizo?. (b) Si la canica se suelta desde una altura de $6R$ medida desde el fondo de la pista, ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto Q?

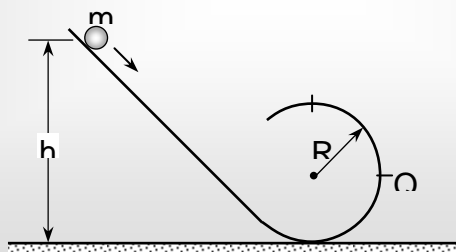


Figura 1.- Enunciado de la situación problemática analizada en esta investigación.

Para concebir las categorías ha sido necesario que los investigadores realicen inferencias sobre las posibles representaciones de los estudiantes al resolver. Se ha considerado como base para el análisis del discurso escrito la unidad: *enunciado-solución*, abordándola como conversación en la solución de un problema. La misma se juzga como un tipo de intercambio con una unidad interactiva mínima. Comprende el inicio (I) de un hablante y la respuesta (R) de otro (Stubbs, 1983).

En las investigaciones etnográficas interpretativas se utilizan como criterio básico de validez los significados locales de las acciones desde el punto de vista de los actores (Erickson, 1989). Esta perspectiva se diferencia de las que parten de categorías o modelos predefinidos por el analista para estudiar cómo operan en la interacción. Se busca determinar, frente a cada contenido, las propiedades y relaciones que lo definen, para luego poder buscar la historia de su aprendizaje, en el uso y dominio progresivo que de ellas va logrando el estudiante al resolver problemas a través de cómo negocian sus versiones sobre el conocimiento científico: si las argumentan, complementan o comparten en la interacción discursiva.

En ocasiones y siempre que ha sido posible se ha usado además en la investigación –como elemento de control– para establecer la *credibilidad* de un estudio cualitativo un conjunto de recursos técnicos (Erlandson y otros, 1993 apud Valles, 1999):

- triangulación de datos, métodos e investigadores;
- acopio de documentación escrita, visual propia del contexto;
- discusiones con colegas;
- cuadernos de campo y diarios de investigación.

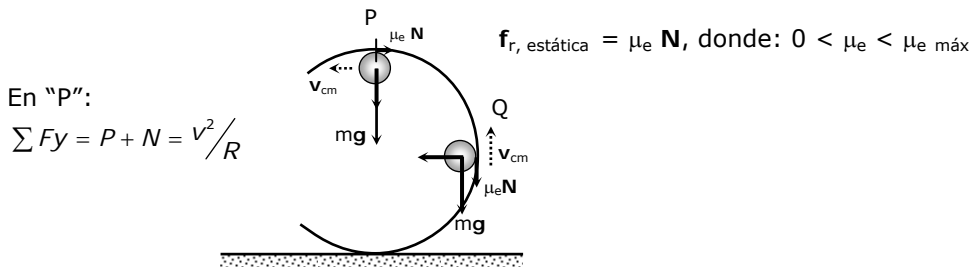
Se tomaron registros a partir de la interacción con los alumnos, tanto en los espacios asignados para las consultas como en los momentos de resolución grupal o individual, como durante y después de las evaluaciones del curso. Este conjunto de técnicas: entrevista informal en horario de consulta, observación de campo y las producciones de los estudiantes permitieron obtener una buena cantidad de material que ha provisto los “datos en contexto” de interés en la elaboración de las categorías a partir de los referenciales teóricos adoptados. De un total de 34 exámenes recolectados, 27 presentaron una solución al problema.

Discusión y evaluación de resultados

Interesa encontrar algunas regularidades que se repitan sistemáticamente y que permitan inferir “pistas” sobre cómo ven, imaginan y/o conciben las distintas situaciones planteadas.

El modelo de la situación consiste en una representación de la canica ejecutando un movimiento de rodadura sin deslizamiento a lo largo de la trayectoria curvilínea sobre un plano vertical debido a la presencia de un campo gravitatorio en el entorno, a las paredes de la canaleta y a las condiciones de partida.

¿Cuál es la condición física para que la canica recorra con éxito la pista en rizo buscando determinar la altura mínima desde la que deberá soltarse? Como lo que se intenta es precisar el movimiento físicamente posible de cuerpos en interacción se necesita contar, al menos con: la noción de reacción de vínculo, trayectoria curvilínea, fuerza centrípeta, la condición de mínimo (v_{\min}), y su relación precisa en el punto de la singularidad. Es decir,



Como N no puede estar dirigida hacia arriba en el punto “P”, la condición de velocidad mínima del cuerpo en “P” -si va a recorrer la pista sin caerse siguiendo la trayectoria del círculo- debe corresponderse con: $N = 0$ o bien $mg = m v^2/R \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{gR}$. Si la $v < \sqrt{gR}$, el peso hacia abajo es mayor que

la fuerza centrípeta necesaria para describir el círculo, y la canica se separa del ciclo antes de llegar a "P".

Si se considera que los modelos mentales son los que realmente tienen las personas en sus cabezas y los que guían el "uso" que hacen de las cosas, un modelo mental de "algo" puede tener distintas versiones según lo que se haga de él y debiera incluir un núcleo central, proposiciones y variados procedimientos de manipulación (Moreira, 1996).

Se elaboran categorías en términos de conceptos explícitos e invariantes operatorios, es decir, en términos de qué *conocimientos-en-acción* están usando los estudiantes en la comprensión de la situación física contenida en la resolución de un problema.

Los estudiantes han presentado acciones y una organización invariante de su actuación diferenciando "restricciones" situacionales de acuerdo con el movimiento físico. Se hallaron *cinco categorías* de representación para la situación física a partir de un análisis cualitativo. Las mismas se elaboraron en base a las limitaciones al movimiento físico que los estudiantes pudieron advertir y a su interpretación desde los referenciales psicológicos asumidos.

Categoría 1: Movimiento de rodadura con "restricciones" nulas o indeterminadas (11%)

Los estudiantes de esta categoría no muestran noción alguna de vínculo ni en P ni en Q. Sólo "tantean" fórmulas para la velocidad en esos puntos. Tampoco articulan con movimiento circular variado -MCV-. Ninguno acompaña la solución con representaciones externas esquemáticas. Uno de los estudiantes de esta categoría resuelve como sigue.

<p>b) W FNC = ΔEM</p> <p> 0 = ΔEC_{EIR} + ΔE_{PG}</p> <p> 0 = ½ (I + Mr²) ω_r² - mg h</p> <p> 0 = ½ (I_{EIR} + Mr²) v_r²/R² - mg 6R</p> $v_r = \sqrt{\frac{(mg \cdot 6R)R^2}{\frac{1}{2}(I_{EIR} + Mr^2)}} = \sqrt{\frac{mg \cdot 6R^3}{\frac{1}{2}(I_{EIR} + Mr^2)}}$ <p>a) h q' tiene q' llegar h_r = P = 2R</p> <p> W FNC = ΔEM</p> <p> 0 = ΔEC_E + ΔE_{PG}</p> <p> 0 = ½ (I_{EIR} + Mr²) ω_r² + mg h_r - mg h_o</p> <p> 0 = ½ (I_{EIR} + Mr²) ω_r² + mg 2R - mg h_o</p> <p> 0 = ½ (I_{EIR} + Mr²) v_r²/r² + mg 2R - mg h_o</p> <p> 0 = ½ (I_{EIR} + Mr²) √(2g/h_o)²/r² + mg 2R - mg h_o</p> $h_o = \frac{-mg \cdot 2R}{\frac{1}{2}(I_{EIR} + Mr^2) - mg}$ <p style="margin-left: 20px;">M r²</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: 20px;"> $h_o = \frac{-m_c \cdot g \cdot 2R}{\frac{9}{10} m_c r^2 - mg}$ </div>	<p style="text-align: right;">Carozzo</p> <p>h = 6R</p> <p>v = √(ω² R²) = ωr</p> <p>ω = v / r</p> <p>ω = v_r / r</p> <p>v_r² = v_o² + 2 g h</p> <p>v_r = √(2 g h_o)</p> <p style="text-align: center;">Esfera Sólida</p> <p>I_{EIR} = 2Mr²/5</p> <p>I_{EIR} = ²/₅ Mr² + ½</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-left: 20px;"> $I_{EIR} = \frac{9}{10} Mr^2$ </div>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figura 2.- Solución presentada a la situación problemática por el alumno Carozzo.

Más que resolver el problema planteado y lejos de los significados atribuidos a las expresiones convencionales, estas soluciones parecen expresar: "Vean cómo opero con signos, realizo los cálculos y obtengo resultados", todo fuera del sistema o dentro, pero improcedente. Privilegian la "forma" (grafía, formato, método, figura) de la solución en relación con la idea de tarea terminada.

Manejan -en parte- un método analítico de resolución a partir de la conservación de la energía mecánica para problemas del tipo. "Conocen" el procedimiento y explicitan una situación física desarticulada que parece no cerrarles mentalmente. Han despejado una expresión literal parcialmente correcta para la altura.

Categoría 2: Movimiento de rodadura con elementos aislados (11%)

Los estudiantes pertenecientes a esta categoría parecen no haber desarrollado integralmente la noción de vínculo. $N=0$ asemeja ser un *concepto-en-acción* presente en el núcleo del modelo mental sin relación aparente con la velocidad. Tampoco asocian con el movimiento circular ni plantean el ítem (b). Uno de los estudiantes de esta categoría presenta la siguiente solución:

Juan

$N = 0$
 $\Sigma F_y = mg + N = m a_c$
 $a = g$

$W_{inc} = \Delta EM$
 $\mu N = \Delta E_{Pg} + \Delta E_c + \Delta E_{cR}$
 $0 = mg h + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$
 $0 = mg h + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m R^2 / 5 \omega^2$
 $h = \frac{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{5} \omega^2}{m g} = \frac{\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{10} R^2 \omega^2}{g}$

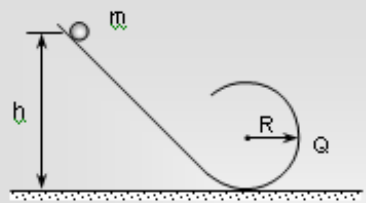
Figura 3.- Solución presentada a la situación problemática por el alumno Juan.

Categoría 3: Movimiento de rodadura con "restricciones" físicamente imposibles (26%)

Para los alumnos que pertenecen a esta categoría es innegable que la velocidad del centro de masa de la esfera en "P" -punto más alto del rizo- es cero.

Visualizan la situación física planteada en el punto P donde la reacción de vínculo junto con la forma de la pista cumplen un rol fundamental en las limitaciones del movimiento. Mientras en Q las dificultades "desaparecen" y resuelven correctamente: (b). El proceso de producción en el que se encuentran, se traslada entonces hacia proponer una respuesta funcional.

La respuesta de uno de ellos es:

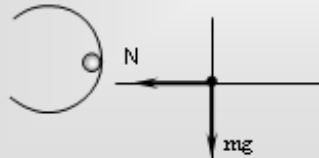


m
 r
 $\omega = 0$

$I_{EIR} = I_0 + MR^2$
 $= \frac{2}{5} M R^2 + MR^2$
 $= \frac{7}{5} M R^2$

$W_{fnc} = \Delta E_C + \Delta E_{Pg}$
 $0 = \frac{1}{2} I_{EIR} (\omega_f^2 - \omega_a^2) + mg (h_f - h_a)$
 $0 = \frac{1}{2} I_{EIR} \omega_f^2 - mg h;$
 $\sqrt{\frac{mg \cdot h}{\frac{1}{2} I}} = \omega_f = \omega;$

$W_{fnc} = \Delta E_C + \Delta E_{Pg}$
 $0 = \frac{1}{2} I_{EIR} (\omega_f^2 - \omega_a^2) + mg (h_f - h_a)$
 $0 = \frac{1}{2} I_{EIR} \frac{mg \cdot h}{\frac{1}{2} I_{EIR}} + mg 2R$
 $\frac{mg 2R}{mg} = h = 2R$



$\Sigma F_x = N = m a_c$
 $N = m v^2 / r$
 $N = m \omega^2 r^2 / r$
 $N = m \omega^2 r$
 $N = m \frac{mg \cdot 6R}{\frac{7}{5} m r^2} = \frac{6R}{\frac{7}{5} r^2} = N$

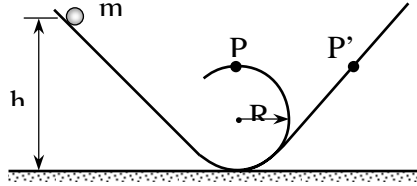
Valeria

Figura 4.- Solución presentada por la alumna Valeria.

Hacen $v_{CM} = 0$ en P *-concepto-en-acción-* y llegan a que $h = 2R$ usando $W_{FNC} = \Delta E_M$ o un *-teorema-en-acción-* equivalente. Al parecer es tan claro este esquema, que han escrito (a veces) directamente: $h = 2R$ como respuesta, sin necesidad de realizar cálculos ni simbolizar. Es decir, que este esquema es de una "obiedad" tal, que tampoco chequean contradicciones. Se trataría de conocimiento-en-acción basado en una noción subelemental de conservación de la energía mecánica. El modelo mental se construye para la comprensión porque dota de capacidad explicativa y predictiva al sujeto, pero sólo para el momento, descartándose una vez acabado su papel o función. Por el contrario, el esquema como se recordará, determina la organización invariante de la conducta y, por lo tanto, goza de un carácter de perdurabilidad y estabilidad que el modelo mental no tiene (Moreira 2002), a pesar de que opere recursivamente. De este modo, el modelo mental sería la representación primera de la situación problemática y el esquema de acción supondría interiorización y condicionaría la actuación.

Estos estudiantes han avanzado en la identificación de la pertinencia de la conservación de la energía mecánica en un movimiento de rodadura sin deslizamiento, aunque no han logrado su articulación con las condiciones de velocidad mínima –y por tanto, con la noción de vínculo– necesarios para una solución puntual.

Así, de acuerdo con la teoría de los campos conceptuales, muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar o de nuestra experiencia intentando modificarlas. Estos estudiantes parecen "ver" a P y a P' como equivalentes. Una representación externa de lo que queremos decir sería:



En palabras de Vergnaud (1996b) son los invariantes operatorios los que logran la articulación esencial entre la teoría y la práctica, pues la percepción, la búsqueda y la selección se basan completamente en el sistema de *conceptos-en-acción* disponibles para el sujeto y en los *teoremas-en-acción* subyacentes a su actuación.

Categoría 4: Movimiento de rodadura con "restricciones" incipientes del movimiento físico (19%)

En esta categoría se encuentran los estudiantes que aún contando con una noción adecuada de vínculo -tanto de la noción de reacción de la superficie como de la forma de la trayectoria- no han percibido la necesidad de plantear la condición de mínimo. Directamente relacionado con una velocidad variable en módulo y dirección, con la aceleración centrípeta y la fuerza resultante. Una solución que muestra cómo estos estudiantes han entendido estas relaciones es la que sigue.

Pablo

$$a_c = v^2/r$$

$$v = \omega r$$

$$W_R = \Delta E_c$$

$$mg h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$mg h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I v^2/R$$

$$mg h = \frac{1}{2} m (NR/m + g) + \frac{1}{2} (N/m R/R + g/R)$$

a)
$$h = \frac{\frac{1}{2} NR + mg + \frac{1}{2} \frac{N}{m} + \frac{g}{R}}{mg}$$

b)
$$W_R = \Delta E_c$$

$$h = 6R \quad mg h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$mg 6R = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (R^2 m + R^2 m) \omega^2$$

$$mg 6R = (\frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} m R^2) \omega$$

$$mg 6R = \frac{3}{2} m R^2 \omega$$

$$\frac{mg 6R \cdot 2}{m R^2 \cdot 3} = \omega \quad \omega = 4g/R$$

$$N = m \omega^2 \quad N = m 16 g^2/R^2$$

$$\Sigma F_x \quad N = m a_c$$

$$\Sigma F_y \quad mg = 0$$

$$N = m v^2/r$$

Figura 5.- Solución presentada por el alumno Pablo.

Al parecer, al interactuar el enunciado con sus conocimientos previos no logra evocar la condición de que la velocidad del cuerpo sea mínima en P relacionando y haciendo $N = 0$. Precisamente hacen $N \neq 0$ y $v_{CM} \neq v_{\min}$. En esta instancia representacional subyace un teorema-en-acción procedente y se dispone de solo algunos conceptos-en-acción (no incluyen la noción de mínimo) para hacer físicamente posible el fenómeno.

Categoría 5: Movimiento de rodadura con "restricciones" diferenciadas del movimiento físico (33%)

Los estudiantes de esta quinta categoría parecen generar modelos mentales en donde se integran coherentemente los elementos que proporciona el enunciado y sus conocimientos previos para determinar el tipo de movimiento que realiza la canica en la trayectoria vertical.

Su construcción supone una adecuada incorporación de relaciones necesarias: espaciales, geométricas, trigonométricas, cinemáticas y dinámicas de alta complejidad. Todos han establecido adecuadamente las condiciones de vínculo y de mínimo. El núcleo contiene al menos algunos *conceptos-en-acción* ($N=0$, fuerza centrípeta, v_{\min}) y *teoremas-en-acción* [$W_R = \Delta E_C$ o equivalente; $N = 0$ entonces $v_{\min} = \sqrt{(gR)}$]. La mayoría acompaña con distintas representaciones externas esquemáticas: dibujo de la trayectoria y diagramas de cuerpo libre.

Un concepto o un puñado de conceptos –tampoco en Física– puede reducirse a su definición, fundamentalmente si nos interesamos por su aprendizaje y enseñanza.

La situación física ¿qué ideas están en juego?

Vemos entonces que los estudiantes han acudido a una amplia gama de soluciones para resolver la situación problemática planteada. ¿Qué nos indica cada una de ellas acerca de las "concepciones y competencias" de los jóvenes sobre el movimiento de rodadura sin deslizamiento?

Las soluciones (en relación con la situación física) que denominamos con restricciones nulas o indeterminadas revelan una centración en aspectos "perceptuales" y "operatorios" de los significantes algebraicos, numéricos y/o dimensionales. Estos indudablemente presentan atributos de señales y de signos, pero de significantes no portadores de sentido. Por tanto, estas características no cumplen una función representativa en el marco del sistema convencional. Por otra parte, si bien es necesario reconocer que cada concepto físico y matemático en juego se representa a través de una forma gráfica "constante" y diferenciada; la centralización en las formas (gestalt) y en las operaciones no asegura que el joven atribuya significados. De hecho, el uso de argumentos, signos, soluciones con restricciones nulas o indeterminadas podría indicar al menos dos tipos de acercamientos diferentes a los significantes algebraicos, numéricos y dimensionales siguiendo a Sheuer (1996):

Que el joven los aborda como "objetos en sí" (Ferreiro, 1987) y no como significantes. Los trata de un modo no "mediacional" (Wertsch, 1988) pues compara las formas en sí mismas en lugar de los significados que estos representan.

Que el joven los considera como significantes analógicos: admite que representan significados cuantitativos, operatorios (como herramientas) y unidades de magnitudes, pero supone que estos son representados a través de atributos similares del significante. Por ejemplo, un número mayor debería representarse a través de una forma gráfica más grande.

En cambio, las dos categorías restantes sí ponen en juego propiedades del sistema. En ese sentido, todas son "válidas". Sin embargo, pueden constituir aproximaciones parciales o coordinadas, así como pueden emplearse en situaciones o modos pertinentes o no.

De hecho, el reconocimiento y la utilización de fórmulas congruentes con lo solicitado en las situaciones físicas, aunque diferenciadas parcialmente, podría señalar al menos dos tipos de inconsistencias diferentes con los significados asignados:

- que es muy sensible al contexto en sentido amplio y,
- que no articula todavía todos los elementos que necesita. Notar que si "trabajan" bien con una condición de contorno no coordinan las otras.

Resolver estas ecuaciones sería imposible para la mayoría de los alumnos si el algoritmo no fuese acompañado por el script. Efectivamente confían en un teorema-en-acción como la conservación de la igualdad para adicionar o sustraer el mismo número en ambos términos; ellos también confían en las metas identificadas al despejar (o aislar) "x" en uno de los términos de la igualdad y la simple expresión numérica sobre el otro. Vergnaud (1987) llama "script-algoritmo a una combinación de un script -a nivel de significantes- y de un algoritmo -a nivel de significado".

Haber comprendido un enunciado y/o poder reproducir parcial o totalmente un script base, no garantiza la tan anhelada conceptualización. Puede apreciarse más claramente que la situación física considerada por nosotros es más que un "recurso de reconocimiento" como señalan Taconis et al (2001). Estos autores relevan la importancia de la memoria en su marco teórico.

Se precisa, por un lado, más que una relación adecuada entre la situación física y los esquemas puestos en juego -según Vergnaud- para dominar un área. Por otro, una importante conceptualización sobre la naturaleza misma del movimiento físico, aquí manifestada a través de la integración de la noción de cuerpo rígido desde la energía y las interacciones, se investiga y presenta en un próximo trabajo.

Queda claro que la operacionalidad de los conceptos y sus relaciones debe ser probada a través de situaciones variadas. En una investigación se debe analizar una mayor variedad de actuaciones y esquemas para comprender en qué consiste, desde el punto de vista cognitivo, este o aquel conjunto de conceptos. Las nociones complejas aún de la física básica universitaria sólo se entienden a través de una diversidad de trabajos prácticos y teóricos. Y comporta, de hecho varias propiedades, cuya pertinencia es variable de acuerdo con la situación a tratar.

Conclusiones e implicaciones didácticas

En la literatura de investigación en ciencias no se cuestiona la importancia de una correcta identificación de la situación física al resolver un problema, pero tampoco se discute en profundidad. Es necesario rescatar que es una frecuente fuente de incomprensiones –aún en estudiantes universitarios. De no ser superada detiene una adecuada resolución.

En este estudio se han elaborado a partir de la solución, cinco niveles de comprensión de las situaciones físicas que implican movimiento en una trayectoria curvilínea sobre un plano vertical. Los resultados obtenidos sugieren que la capacidad de los estudiantes de generar ciertas resoluciones (y no otras) se debe a que han elaborado determinadas representaciones mentales. El 33% de los estudiantes ha presentado acciones y una organización invariante de su comportamiento diferenciando “restricciones” situacionales acordes con el movimiento físico.

El fenómeno de la variabilidad cognitiva inter e intrasujeto se ha evidenciado en las categorías elaboradas. Por un lado, los cinco niveles de comprensión identificados. Y por otro, la pluralidad representacional observada (hasta) en un mismo sujeto. Al realizar la tarea estos estudiantes han exhibido diversas formas de pensar, primero escriben: “Se cae (la canica) cuando $N=0$ entonces me queda mg hacia abajo” y luego plantea “correctamente” el ítem (a). En su mente conviven más de una representación. Estas representaciones se recuperan según el contexto comunicativo en el que los participantes interactúan (Mortimer y Machado, 1997; Escudero y Moreira, 2002) o según las demandas de las tareas y su contenido (Escudero 2005).

El enunciado parece ayudar a evocar una representación –“con el fin de que la canica se quede en la pista en la parte superior del rizo”–, mientras el contexto de trabajo en el aula evoca otra. La explicitación es un camino válido para intentar superar un enunciado equívoco.

Los modelos mentales de las personas pueden ser deficientes en varios aspectos, tal vez, incluyendo elementos innecesarios, erróneos o contradictorios. En la enseñanza, es preciso apostar por escenarios instruccionales donde se favorezcan representaciones múltiples para facilitar el cambio conceptual en lugar de plantearse sustituciones o reemplazos de unas concepciones por otras. En la investigación, es necesario desarrollar técnicas de investigación apropiadas y procurar entender los modelos confusos, indefinidos, incompletos que las personas tienen.

En consecuencia, el estudio del cambio conceptual, y su promoción a través de escenarios de instrucción, requiere que consideremos detenidamente las formas en que esas representaciones diversas o múltiples para un mismo dominio conviven o coexisten tanto dentro de una misma persona como en el marco de una comunidad de aprendizaje, entre personas (Pozo y Rodrigo, 2001). Nuestros hallazgos parecen indicar que vamos por buen camino.

Este trabajo ha implicado hacer un análisis muy cercano a los datos tratando de no perder información acerca de sus singularidades. Encontramos así, diferentes representaciones, que muestran distintas

grados de explicitación de los conocimientos de los que disponen los estudiantes.

Con frecuencia no se cuestiona la importancia de una correcta identificación de la situación física al resolver problemas ni se la discute en profundidad. El valor radica en que es la puerta de entrada a una buena resolución posibilitando su significación. Estas representaciones se recuperan según el contexto comunicativo en el que los participantes interactúan (Mortimer y Machado, 1997; Escudero y Moreira, 2002) o según las demandas de las tareas y su contenido (Escudero 2005).

Notar que todas y cada una de las categorías elaboradas para el análisis de la situación física "comprendida" por los estudiantes -internamente- presentan diferentes calidades de solución. Este hecho aporta evidencia empírica sobre la necesidad de buscar más elementos que permitan desentrañar la estructura fina de las dificultades y los éxitos en la resolución del problema completo. Esta tarea se lleva a cabo en un próximo trabajo, como ya se dijo.

Al parecer al integrar ambas teorías en un referente común de más amplia base explicativa se inaugura un potencial campo de investigación que nos permite comprender el proceso múltiple y cabal de la cognición humana.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido subsidiado por CICITCA de la UNSJ (San Juan, Argentina).

Referencias bibliográficas

Alonso, M. y Finn, E. (1976). *Física*. Vol. I. México: Fondo Educativo Interamericano.

Argentina, Ministerio de Educación de la Nación (1997). *Contenidos Básicos Comunes en Ciencias Naturales para la Educación Polimodal*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Argentina, Ministerio de Educación de la Nación (1997). *Contenidos Básicos Orientados en Ciencias Naturales para la Educación Polimodal*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Escudero, C. y González, S. (1996). Resolución de problemas en nivel medio: un cambio cognitivo y social. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, Vol. 1 (2). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Escudero, C.; González, S. y García, M. (2000). ¿Se tiene en cuenta algún criterio cuando se elaboran prácticos de problemas en Física?. *Revista de Enseñanza de la Física* (Argentina), 13 (2), 5-12.

Escudero, C. y Moreira, M. A. (2002). Resolución de problemas de cinemática en nivel medio: estudio de algunas representaciones. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências* (RBPEC), 2 (3), 5-25.

Escudero, C., Moreira, M. A. y Caballero, C. (2003). Teoremas y conceptos-en-acción en clases de Física introductoria en secundaria. *Revista*

Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 2, 3, Artículo 1. En <http://www.saum.vigo.es/reec>

Escudero, C. y Jaime, E. (2003). Elementos para una conceptualización de la noción de cuerpo rígido en la resolución de un problema integrativo. Memorias XIII Reunión Nacional de Educación en Física (REF XIII), Río Cuarto (Córdoba, Argentina).

Escudero, C.; Moreira, M. A. y Caballero, C. (2004). En busca de significado para la noción de aceleración en un aula de nivel medio: análisis del discurso de alumnos y profesor. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências* (RBPEC), 4 (1). <http://www.fc.unesp.br/abrapec/revistas>

Escudero, C., Moreira, M. A. y Caballero, C. (2005). Diferenciación de nociones esenciales de cinemática de las traslaciones a través de situaciones problemáticas: análisis del discurso de alumnos y profesor en un aula de Física de nivel medio. *Revista Argentina de Física* (Dpto de Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Universidad Nacional de Córdoba), 1(1), 32-41.

Escudero, C. (2005). Inferencias y modelos mentales: un estudio de resolución de problemas acerca de los primeros contenidos de Física abordados en el aula por estudiantes de nivel medio. Tesis doctoral. Universidad de Burgos (España) – UFRGS (Brasil).

Ferreiro, E. (1987). *El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria en Proceso de Alfabetización y Alfabetización en proceso*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Franchi, A. (1999). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. En S.D. Alcântara Machado, et al (Eds.), *Educação Matemática: uma introdução* (pp. 155-195). San Pablo: EDUC.

Greca, I. M. y Moreira, M. A. (2002) Além da detecção de modelos mentais dos estudantes. Uma proposta representacional integradora. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, Vol. 7(1). Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Johnson - Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson - Laird, P. (1990). *El ordenador y la mente. Introducción a la ciencia cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Morano, D. et al. (2005). Proyecto estratégico de reforma curricular de las ingenierías: Documento preliminar. XXXVII Reunión Plenaria CONFEDI, Santa Fe (Argentina).

Moreira, M. A. (1996). Modelos mentais. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, Vol. 1 (2).

Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*. Brasil, Vol. 7(1).

Site: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>

Mortimer, E. Y Machado, A. (1997). Múltiplos olhares sobre um episódio de ensino: por que o gelo flutua na água?. Encontro sobre teoria e pesquisa em ensino de Ciências: linguagem, cultura e cognição reflexos para o ensino de Ciências, Belo Horizonte (Brasil), 139-162.

Pozo, J. I. Y Rodrigo, M. J. (2001). Del cambio de contenido al cambio representacional en el conocimiento conceptual. *Infancia y Aprendizaje*, 24 (4), 407-423.

Pozo, J. I. (2001). *Humana mente. El mundo, la conciencia y la carne*. Madrid: Morata.

Resnick, R.; Halliday, D. & Krane, K. (1993). *Física . Vol. 1* Usa: CECSA.

Ricco, G. (1994). Teorías psicológicas del aprendizaje. Temas de Psicopedagogía 6, (pp. 35-58). Buenos Aires: Fundación EPPEC.

Roederer, J. (1963). *Mecánica elemental*. Bs. As.: Ed. Eudeba.

Scheuer, N.; Bressan, A. M.; Bottazzi, C. y T. Canelo (1996). Este es más grande porque ... o cómo los niños comparan numerales. *Revista Argentina de Educación*, Año XIV, N° 24, 76-100.

Stubbs, M. (1983). *Análisis del discurso*. Madrid: Alianza.

Taconis, R., Ferguson-Hessler, M.G.M. y H. Broekkamp (2001). Teaching Science Problem Solving: an Overview of Experimental Work. *Journal of Research in Science Teaching*, Vol 38 (4), 442-468.

Valles, M. S. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social*. Madrid: Editorial Síntesis.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Moser & Romberg, (Eds.), *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, pp. 39-59. NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1987). Problem solving and concept development in the learning of mathematics. E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, N.Y.: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996a). Education: the best part of Piaget's heritage. *Swiss Journal of Psychology*, 55(2/3), 112-118.

Vergnaud, G. (1996b). A trama dos campos conceptuais na construção dos cohecimentos. *Revista de GEMPA*, Porto Alegre, 4, 9-19.

Vergnaud, G. (1996c). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas*, 26(10), 195-207.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.

Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.